Część I: Trygonometria, funkcje cyklometryczne

Definicja 1. Funkcję $g: Y \to X$ nazywamy **odwrotną** do funkcji $f: X \to Y$ jeśli

$$(g \circ f)(x) = x \text{ dla } x \in X,$$
$$(f \circ g)(y) = y \text{ dla } y \in Y.$$

Funkcję odwrotną oznaczamy symbolem f^{-1}.

Przykład 2. Funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = 2x$ jest funkcja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $g(y) = \frac{1}{2}y$, bo:
dla $x \in \mathbb{R}$ mamy:
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$
dla $y \in \mathbb{R}$ mamy:
$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = 2g(y) = 2 \cdot \frac{1}{2}y = y$.

Uwaga 3. Nie każda funkcja posiada funkcję odwrotną.

Twierdzenie 4. Funkcji $f: X \to Y$ posiada funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest iniekcją (jest różnowartościowa) oraz suriekcją (każda wartość ze zbioru Y jest przyjmowana)[1].

Przykład 5. Znajdziemy funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = x^3 + 1$.
Zbiór Y nie jest podany, więc przyjmujemy $Y = ZW_f = \mathbb{R}$. Wystarczy sprawdzić, czy jest to funkcja różnowartościowa.
Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x_1) = f(x_2)$. Wtedy:

$$x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Zatem funkcja jest odwracalna. Chcemy znaleźć wzór funkcji odwrotnej. W tym celu przekształcamy wzór funkcji f, by wyznaczyć zmienną x.
$y = x^3 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$, a więc funkcja odwrotna ma wzór $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$, a wracając[2] do zmiennej x mamy $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

Twierdzenie 6. Wykresy funkcji i funkcji do niej odwrotnej są do siebie symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$.

Funkcje cyklometryczne to, najprościej mówiąc, funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych. Jak pamiętamy z lekcji matematyki, funkcje trygonometryczne (sinus, cosinus, tangens, cotangens) nie są funkcjami różnowartościowymi. Nie możemy więc w ogólności ich odwrócić. Każda z nich jest jednak różnowartościowa na odpowiednich kawałkach, a więc na tych kawałkach można je odwrócić.
Zobaczmy jak to wygląda w przypadku funkcji sinus.
Jest ona iniekcją w przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Wtedy zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$. Tak więc funkcja odwrotna prowadzi z przedziału $[-1, 1]$ w przedział $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Oznaczamy są symbolem $\arcsin$.
Analogicznie definiujemy pozostałe funkcje.

Definicja 7 (Funkcje cyklometryczne)**.**

- $\arcsin = \left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} : [-1, 1] \ni x \mapsto \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **(arcus sinus)**
- $\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \ni x \mapsto \arccos x \in [0, \pi]$ **(arcus cosinus)**
- $\operatorname{arc\,tg} = \left(\operatorname{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arc\,tg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **(arcus tangens)**
- $\operatorname{arc\,ctg} = \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arc\,ctg} x \in (0, \pi)$ **(arcus cotangens)**

[1] Jeśli zbiór Y nie jest w zadaniu podany, to przyjmujemy, że jest nim ZW_f. Wtedy w oczywisty sposób funkcja jest suriekcją.

[2] Zauważmy, że oznaczenie zmiennej, której używamy w definicji funkcji jest bez znaczenia. Ona tylko ukazuje jak wygląda wzór funkcji – nie ma znaczenia czy użyjemy x, y, z, s, czy nawet symbolu np. $*$. Ze względu, że jesteśmy przyzwyczajeni do określania funkcji za pomocą zmiennej x, również tutaj wracamy do oznaczenia argumentu funkcji przez x. Dzięki temu możemy również obie te funkcje zaznaczyć w jednym układzie współrzędnych.

Wniosek 8.

- $\operatorname{arc}\sin x = y \Leftrightarrow x = \sin y \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\operatorname{arc}\cos x = y \Leftrightarrow x = \cos y \wedge y \in [0, \pi]$
- $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \wedge y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y \wedge y \in (0, \pi)$.